



Equations différentielles

1 Equation différentielle $y' = a y$ avec $a \neq 0$

Théorème

L'ensemble des solutions sur \mathbf{R} de l'équation différentielle $y' = a y$ avec $a \neq 0$ est l'ensemble des fonctions f telles que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = k e^{ax}$ où $k \in \mathbf{R}$

2 Equation différentielle $y' = a y + b$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Théorème

L'ensemble des solutions sur \mathbf{R} de l'équation différentielle $y' = a y + b$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ est l'ensemble des fonctions f telles que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbf{R}$

Propriété

Pour tout couple (x_0, y_0) de réels, l'équation différentielle $y' = a y + b$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ admet une solution f et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$

On écrit l'équation différentielle sous la forme $y' = -\frac{3}{2}y$

Les solutions dans \mathbf{R} sont les fonctions définies pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = k e^{-\frac{3}{2}x}$ avec $k \in \mathbf{R}$

Exemple 2

Trouver la solution f de l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$ telle que $f(2) = 1$

D'après l'exercice précédent, les solutions dans \mathbf{R} sont les fonctions



Equations différentielles

$$f(x) = k e^{-\frac{3}{2}x} \text{ avec } k \in \mathbf{R}$$

Traduisons la condition initiale $f(2) = 1$ soit $f(2) = k e^{-3} = 1$ soit $k = e^3$

Ainsi, la solution f de $2y' + 3y = 0$ telle que $f(2) = 1$ est la fonction $f(x) = e^3 e^{-\frac{3}{2}x} = e^{3(1-\frac{1}{2}x)}$

Exemple 3

(E) est l'équation différentielle $y' = -2y + 5$

Résoudre (E) et déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 2$

Les solutions de (E) sur \mathbf{R} sont les fonctions

$$f(x) = k e^{-2x} + \frac{5}{2} \text{ avec } k \in \mathbf{R}$$

Traduisons la condition $f(0) = 2$ soit $f(0) = k + \frac{5}{2} = 2$ et donc $k = -\frac{1}{2}$

La solution de $y' = -2y + 5$ telle que $f(0) = 2$ est la fonction $f(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{5}{2}$



Equations différentielles

3 Equation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbf{R}^*$

Théorème

L'ensemble des solutions sur \mathbf{R} de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbf{R}^*$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = k_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x \text{ avec } k_1 \in \mathbf{R}, k_2 \in \mathbf{R}$$

Remarque

On peut aussi écrire les solutions sous la forme

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = A \cos(\omega x + \varphi) \text{ avec } A \in \mathbf{R}, \varphi \in \mathbf{R}$$

Exemple

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$
2. Trouver la solution de l'équation précédente qui satisfait les conditions $f(0) = 1$ et $f'(\pi) = -2$

Solution:

1. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$f(x) = k_1 \cos 3x + k_2 \sin 3x \text{ avec } k_1 \in \mathbf{R}, k_2 \in \mathbf{R}$$

2. Il s'agit de trouver une fonction f dont les constantes k_1 et k_2 vérifient les conditions imposées.

La condition $f(0) = 1$ est équivalente à $f(0) = k_1 \cos 0 + k_2 \sin 0 = k_1 = 1$ soit $k_1 = 1$

De même, nous avons pour tout réel x ,

$$f'(x) = -3k_1 \sin 3x + 3k_2 \cos 3x$$

La condition $f'(\pi) = -2$ est équivalente à $f'(\pi) = -3k_1 \sin 3\pi + 3k_2 \cos 3\pi = -3k_2 = -2$

$$\text{soit } k_2 = \frac{2}{3}$$

La solution cherchée est la fonction

$$f_{1, \frac{2}{3}} : x \mapsto \cos 3x + \frac{2}{3} \sin 3x$$